General Relativity

- 1.1. 狭义相对论简介
    1. 1.1.1. Lorentz 变换
    2. 1.1.2. 时间膨胀
        1. 1.1.2.1. 时间效应与Doppler 效应表观时间膨胀或收缩的区别
    3. 1.1.3. 等效原理
        1. 1.1.3.1. 引力质量=惯性质量
        2. 1.1.3.2. 惯性力的本质
- 1.2. 广义相对论的空间时间
    1. 1.2.1. 度规
- 1.3. 对相对性原理的原则性考查
    1. 1.3.1. 扩充相对性原理的缘由
    2. 1.3.2. 空间时间连续性
- 2.1. 广义协变原理的基本思想
    1. 2.1.1. 张量
- 2.2. 张量分析
    1. 2.2.1. 逆变和协变四维张量
    2. 2.2.2. 张量运算
    3. 2.2.3. 矢量的平移和仿射联络
    4. 2.2.4. 张量的协变微商
    5. 2.2.5. 引力
    6. 2.2.6. 曲率张量
        1. 2.2.6.1. 引入
        2. 2.2.6.2. 性质
        3. 2.2.6.3. 缩并
        4. 2.2.6.4. 几何意义
- 2.3. 黎曼几何
    1. 2.3.1. 黎曼空间和度规空间
    2. 2.3.2. 张量指标的升降
    3. 2.3.3. 克里斯朵夫联络
    4. 2.3.4. 黎曼空间中的测地线
    5. 2.3.5. 黎曼空间的曲率张量
    6. 2.3.6. 毕安基（Bianchi）恒等式
    7. 2.3.7. 时空的等度规 Killing矢量

- 2.4. 第二章重点梳理
- 3.1. 等效原理
    1. 3.1.1. 等效原理的描述
    2. 3.1.2. 广义协变原理
- 3.2. 非欧几何的引入
- 3.3. 引力几何化
    1. 3.3.1. 牛顿极限
- 3.4. 广义协变性和不变性
- 3.5. Einstein 场方程
    1. 3.5.1. 场方程的建立
    2. 3.5.2. 场方程的求解
- 3.6. 引力波
    1. 3.6.1. 引力波理论基础
    2. 3.6.2. 引力波方程
    3. 3.6.3. 引力波的性质
    4. 3.6.4. 引力波天文学
- 4.1. 观测量作为标量
- 4.2. 时空间隔的测量和投影算符
- 4.3. 物理的坐标系
- 5.1. 球对称度规场的一般结构 史瓦西外部解
- 5.2. 伯克霍夫定理
- 5.3. 史瓦西坐标的物理意义
- 3.1. 理论介绍
- 3.2. 实验验证
    1. 3.2.1. LIGO
        1. 3.2.1.1. LIGO的设计原理[^2]
        2. 3.2.1.2. 困难和解决措施
        3. 3.2.1.3. 探测成果
    2. 3.2.2. LISA、天琴计划与太极计划
- 3.3. 为什么人们至今仍然热衷于检验广义相对论?

1. 绪论

说明：范老师的《广义相对论》十分简单，我的笔记大部分也是从他的 ppt 上抄下来的。建议以 ppt 为主。

1.1. 狭义相对论简介

1.1.1. Lorentz 变换

自然定律对Lorentz变换群不变
这变换具有如下形式

$$x^{'a} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} + a^{\alpha} \tag{1}$$

且满足

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta}\eta_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\gamma\delta}$$

而

$$f(x) = \begin{cases} +1, \mu = \nu = 1, 2, 3; \\ -1, \mu = \nu = 0; \\ 0, \mu \neq \nu. \end{cases}$$

时间间隔

$$d\tau = dt^2 - dx^2 = -\eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

新的坐标系$x^{'\alpha}$ 中，由 (1)式，得出坐标的微分为

$$dx^{'\alpha} = \Lambda^{\beta}_{\alpha}dx^{\gamma}$$

故新的时间间隔将是

$$d\tau^{'2} = -\eta^{\beta}_{\alpha}dx^{'\alpha}dx^{\beta} = -\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{\alpha}\Lambda^{\delta}_{\beta} = x^{\gamma}dx^{\delta} = -\eta_{\lambda\delta}dx^{\gamma}dx^{\delta}$$

因此

$$d\tau^{'2} = d\tau^2$$

光速在新坐标系仍等于1。

1.1.2. 时间膨胀

当一个观测者注视着一个静止的时钟时，他将看到分开两次滴答声的空－时间隔是
$dx = 0, dt = \Delta t$。其中Δt是由时钟制造者确定的两次滴答声间的标称周期。此观测者将计算出原时间隔为

$$d\tau \equiv (dt^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}} = \Delta t$$

看见时钟以速度v运动的第二观测者，将观测到间隔$dt^{'}$ ，空间间隔$dx^{'} = vdt^{'}$，他认为时间间隔为

$$d\tau^{'} \equiv (dt^{'2} - dx^{'2})^{\frac{1}{2}} = (1 - v^2)^{\frac{1}{2}}dt^{'}$$

但是二者都是惯性坐标系，因而他们的坐标之间有Lorentz 变换关系，由于原时（时间间隔）相等，看到时钟在运动的观测者，认为周期是

$$dt^{'} = \Delta(1-v^2)^{-0.5} \tag{2}$$

1.1.2.1. 时间效应与Doppler 效应表观时间膨胀或收缩的区别

如果我们的“时钟”是运动的光源，光的频率是$\nu = \frac{1}{\Delta t}$，则由 (2)式可知$dt^{'}$大小，但是观测者与光源距离增加$v_r dt^{'}$，因此周期变为

$$dt = (1+v_r)dt^{'} = (1+v_r)(1-v^2)^{-0.5}\Delta t$$

那么，观测者观测到的光频率与静止光源实际光频率之比是

$$v_{obs} = (1+v_r)^{-1}(1-v^2)^{0.5}$$

$\nu_{红} < \nu_{紫}$

- 若光源向远处运动，即$v_r > 0, \nu_{obs} < \nu$，红移；
- 若$v_r = 0$，纯粹的时间膨胀引起的红移；
- 若$v_r = -v$，紫移。

1.1.3. 等效原理

1.1.3.1. 引力质量=惯性质量

1. 惯性质量 $F = m_I a$
2. 引力质量$F = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow F = m_g g$

1.1.3.2. 惯性力的本质

1. 牛顿解释：相对于绝对惯性系有运动
2. 狭义相对论：是非惯性系产生的
3. 理想实验：爱因斯坦电梯$\Rightarrow$ “局部”下银引力场作用 *等效于* 惯性力
   弱等效原理：惯性力场与引力场的动力学效应局部不可分辨。
   强等效原理：局部惯性系（一切物理规律都是洛伦兹协变的）

1.2. 广义相对论的空间时间

1.2.1. 度规

任一曲面的基本性质是度规函数，它完全决定在曲面上沿着它们之间的最短路径的距离。
如果曲面是非欧的，那么定义两点之间距离ds

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2)dx_2^1 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}(x_1, x_2)dx_2^2$$

ds^2的形式是度量一个空间的标志。

- 对于半径为r的球面，球坐标(θ, φ)

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

1.3. 对相对性原理的原则性考查

真空中光速不变公设，结合狭义相对性原理，得到狭义相对论从而推出：同时性的相对性、洛仑兹变换，以及同它们有关的关于运动的刚体和时钟性状的定理。

狭义相对论使空间和时间的理论所受的修改是深刻的，但一个重要之点未动：对于一只同（特定的）参考系相对静止的时钟上两个选定的指针位置，总对应着一个具有一定长度的时间间隔，这个间隔同地点和时间无关。

马赫的问题：“为什么惯性系在物理上比其他坐标系都特殊？”

1.3.1. 扩充相对性原理的缘由

物理学的定律应该对于任何参照系都成立，都相同。

1.3.2. 空间时间连续性

- 表示自然界普遍规律的方程所要求的广义协变性
- 在广义相对论里，空间和时间的量不能如下定义：即空间的坐标差能用单位量杆直接量出，时间的坐标差能用标准钟量出。
- 普遍的自然规律是由那些对一切坐标系都有效的方程来表示的，它们对于无论哪种代换都是协变的（广义协变）。

2. 广义相对论的数学基础

2.1. 广义协变原理的基本思想

广义协变原理要求物理方程组对于坐标的任何代换都必须是协变的。

协变（covariant）：一个物理定律以某方程式表示时，若在不同的坐标中，该方程式的形式一律不变，则称该方程式为协变。
通过对张量形成规则的考查，我们就得到了建立广义协变定律的方法。

2.1.1. 张量

- 爱因斯坦在其广义相对论中广泛地利用了张量。
- 标量可以看作是0阶张量，矢量可以看作一阶张量。
- 张量中有许多特殊的形式，比如对称张量、反对称张量等等。

- 仿射几何：检查平行线段或平行矢量的行为；
- 度规几何：根据长度和面积的测量
- 当在某个给定的曲面内进行平行移动或测量长度和面积时，我们可以探测的只有**内禀曲率**。这是我们研究Riemann几何时将涉及的唯一曲率。

2.2. 张量分析

2.2.1. 逆变和协变四维张量

1. 逆变四元矢量

$$d\tilde{x^\mu} = _\alpha \frac{\partial \tilde{x^\mu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial \tilde{x^\mu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

线元表示为后者的线性齐次函数，因此把$d\tilde{x^\mu}$看成是张量分量，称为**逆变四元矢量**。指标 α 称为*哑指标*（dummy index）。
逆变四元矢量变换规则

$$\tilde{A}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha$$

2. 协变四元矢量

- 如果对于每个任意选取的逆变四元矢量B^ν，有四个量A_ν，使

$$\sum_\sigma \tilde{A}_\sigma \tilde{B}^\sigma = const.$$

则称Av为一个协变四元矢量。
协变四元矢量变换规则

$$\tilde{A}_\sigma = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\sigma} A_\nu$$

3. 逆变张量
如果对两个逆变四元矢量的分量A^α和B^β来构造所有16个乘积$T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta$$

按照四元矢量变换规则，得到***逆变张量变换规则***

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

4. ***协变张量变换规则***

$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta$$
$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} T_{\alpha\beta}$$

5. 高阶张量

- n维空间的m阶张量具有n^m个分量。
- **标量**可看成零阶的逆变张量或零阶的协变张量。
- 协变张量与逆变张量之间的区别在于变换规则：每一个指标的变换规则与坐标微分的逆变换相一致。指标的不同仅仅是为了符号上加以区分。

6. 混合张量
   既有逆变指标又有协变指标。最低阶的混合张量为二阶，变换规则如下

$$\tilde{A}^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} A^\alpha_\beta$$

   (p,q)**阶张量**可有p个逆变指标，q个协变指标，即有形式

$$A^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q}$$

7. 对称张量：指标对调，分量不变。
8. 反对称张量：指标对调，分量反号。

2.2.2. 张量运算

1. 张量的加减法
   相应分量的相加或相减。两个张量必须同阶。
2. 张量的乘法（外乘）

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}B_\sigma, \quad T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}, \quad T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}$$

3. **混合张量的缩并（降阶）** 任何一个混合张量，当把它的一个协变性的指标同一个逆变性的指标相乘，并对这个指标累加起来，这样就构成一个比原来的张量低两阶的张量。

$$A^\delta_\beta = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\left(=\sum_\alpha A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\right)$$

4. **张量的内乘** 外乘后再缩并。

$$A_{\mu\nu}B^\nu = D^\nu_{\mu\nu} = D_\mu$$

2.2.3. 矢量的平移和仿射联络

- 为使微分运算不破坏张量性质，引入一种新的操作，称张量的平移。为实现张量平移所要的新概念就是仿射联络。

1. **仿射联络** 以协变矢量的平移来引入仿射联络，定义 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(P)$ 为A_μ在P点的 仿射联络，并且满足

$$\delta A_\mu(P) = A_\mu(P \to Q) - A_\mu(P) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(P) A_\lambda(P) dx^\nu$$

2. **协变矢量仿射联络的变换公式**

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\beta}$$

3. **逆变矢量仿射联络的变换公式**
4. 仿射联络性质
   - 联络的对称组合

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right)$$

   - **反对称组合**是一个下标反称的张量，称为仿射空间的*挠率张量*。**若挠率张量为0，则联络是对称的**。

$$\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right)$$

   - 一个非对称的联络总可表示为对称联络和挠率张量之和

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\lambda}_{[\nu\mu]}$$

2.2.4. 张量的协变微商

在张量平移的基础上，对张量场定义一种新的微商，称为协变微商。**张量场求协变微商后，仍将具有张量的性质**。

- 标量的的普通微商自动具有张量的性质。

$$\tilde{T}_{,\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} = T_{,\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$$

  标量的的协变微商 $T_{;\nu}$ 等于普通微商 T,ν

1. **协变矢量的协变微商公式** 定义协变矢量 T 对 ν 的协变微商

$$T_{\mu;\nu} = T_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} T_\lambda$$

   仍然是一个二阶协变张量。

2. **逆变矢量的协变微商公式**

$$T^{\mu}_{;\nu} = T^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} T^{\lambda}$$

3. 协变微商仍满足乘法分配法则。

- 推导高阶张量的协变微商公式

2.2.5. 引力

等效原理说，在空－时的任一点，我们可以建立一个使物质满足狭义相对论规律的局部惯性系。考虑在纯粹引力作用下自由运动的一个粒子。由等效原理，存在一个自由降落的坐标系 ξ^{α}，粒子在这个坐标系里的运动方程是空－时中的一条直线，即

$$\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0$$

其中 $d\tau$ 是原时（固有时）

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}$$

（固有时的物理解释：是一只与粒子一起以同样速度运动的钟所测量的时间间隔）
现在假设采用任意别的坐标系 x^{μ}，它可以是静止于实验室的Descartes坐标系，也可以是曲线的、加速的、旋转的或我们想要的任何其它的坐标系。自由降落坐标ξ^{α}是x^{μ}的函数，则运动方程变为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) \\ &= \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} \end{aligned}$$

两边乘以 $\dfrac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}}$ ，并利用

$$\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}} = \delta^{\lambda}_{\mu}$$

得到新坐标系中自由下落粒子的运动方程

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} \end{aligned}$$

- 定义**仿射联络**$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial x^{\lambda}}{\partial\xi^{\alpha}}\dfrac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$，包含了曲面的几何性质，这表明引力与时空的几何性质相联系。

- 定义**度规张量**

$$g_{\mu\nu}=\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}$$

那么原时也可以用任意的坐标系表示成

$$\begin{aligned}d\tau^{2}&=-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu}\cdot\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu}\\&=-g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\end{aligned}$$

由于引力场不能在局部惯性坐标系里产生任何效应，因此可以发现引力的所有效应均包含在 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 中。

- **物理意义：**
  1. 决定引力场的性质的是 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.
  2. 坐标距离无限小的两个事件之间的原时是由度规张量来决定的
  3. $g_{\mu\nu}$也是引力势，它的导数决定度规张量。
  4. 粒子的运动方程可表述为：在称为引力场的弯曲空－时中一个自由降落的质点将沿着两点间最短（或最长）可能的路径运动，“长度”是由原时来度量的。这样的路径称为**测地线**。（相当于欧式几何中的“直线”）

2.2.6. 曲率张量

联络是决定时间-空间几何性质的重要量，但不是张量。而挠率是由联络构成的重要张量。联络也可以构造出另一重要张量，即曲率张量。

2.2.6.1. 引入

已知 $A_{\lambda;\mu}$ 是二阶协变张量，利用

$$T_{\mu\nu;\lambda}=T_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}T_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}T_{\mu\rho}$$

任一协变矢量场 $A_{\mu}(x)$的二阶协变微商为

$$\begin{aligned}A_{\lambda;\mu;\nu}&=A_{\lambda;\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}A_{\rho;\mu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}\\&=A_{\lambda,\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu}A_{\rho}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}A_{\rho,\mu}+\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}A_{\sigma}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}\end{aligned}$$

$A_{\lambda;\mu;\nu}$ 的表达式可由上式简单交换 μ 和 ν 而得到。因此，整理得到

$$A_{\lambda;[\mu;\nu]}\equiv\frac{1}{2}(A_{\lambda;\mu;\nu}-A_{\lambda;\nu;\mu})=\frac{1}{2}\left(R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}A_{\rho}-2\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}A_{\lambda;\rho}\right)$$

- 定义曲率张量

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}\equiv-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu}+\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}+\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}$$

2.2.6.2. 性质

1. 它完全由联络和联络的一阶微商决定。
2. 它对下标 μ 和 ν 是反对称的，即

$$R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\rho}_{\lambda\nu\mu}$$

2.2.6.3. 缩并

2.2.6.4. 几何意义

定理一 在联络空间中平移与路径无关的充要条件是全部张量处处为零。
定理二 空间为平直的充要条件是曲率和挠率张量的所有分量为零。

曲率张量与挠率张量一起，构成了刻画空间弯曲情况的基本张量。曲率和挠率张量都为零 $\Rightarrow$ 空间平坦 。

2.3. 黎曼几何

在仿射空间中引入度规场和不变距离，就构成了黎曼空间。

2.3.1. 黎曼空间和度规空间

时空相邻两点的距离

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为度规张量。 $g_{\mu\nu}$ 为对称张量。
在仿射空间中确立了度规场后，空间任意两相邻点的距离有了意义。这样的空间就叫黎曼空间。三维欧式空间是黎曼空间的特例。

1. 在欧氏空间采用笛卡尔坐标，度规张量与空间点无关。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 欧式空间的球坐标系的度规张量与坐标点有关。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta^2 \end{pmatrix}$$

3. 闵柯夫斯基空间（狭义相对论空间）

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

度规

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\equiv\eta_{\mu\nu}$$

4. 一个黎曼空间是平坦的，如果能选取适当的坐标使度规张量

$$g_{\mu\nu}=\begin{cases}+1\quad\text{or}\ -1, & \mu=\nu\\0, & \mu\neq\nu\end{cases}$$

推论：如果区域V内度规张量是常数，那么V内的空间是平坦的。

2.3.2. 张量指标的升降

利用度规可把任一个张量形式的物理量或几何量表示成逆变的、协变的或混合的形式。这是黎曼空间中的张量的新性质。
例1：任一矢量可借助度规而构成一个标量，称为矢量长度的平方。

$$g_{\mu\nu}T^{\mu}T^{\nu}=T_{\nu}T^{\nu}=g^{\mu\nu}T_{\mu}T_{\nu}$$

2.3.3. 克里斯朵夫联络

^5e5949
联络：标记平行移动的路径
克里斯朵夫联络：黎曼空间中，要求平移操作保持矢量的长度不变，且联络对称，那么联络完全由度规场决定。

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}&=\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\mu\nu,\lambda}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\lambda\mu,\nu})\\&=\begin{Bmatrix}\alpha\\\lambda\mu\end{Bmatrix}=g^{\alpha\nu}\{\nu,\lambda\mu\}\end{aligned}$$

定理： 若P点的联络为零，则P点的邻域度规张量近似为常数。
结论：对采用对称联络的黎曼空间中的任一点P，总可以找到一组适当的坐标，使得从这组坐标看来P点的邻域是近似**平坦**的。
这个结论正是广义相对论的等效原理的数学基础。在引力一节中，在引力场中引入局部惯性系来消除引力场的动力学效应。在引力场（黎曼空间）中任何一点可引入局部惯性系，即在小的时空范围内总是可以**通过一定的坐标变换把引力场的动力学效应消除掉**。

2.3.4. 黎曼空间中的测地线

性质： 对空间任意两点A和B定义泛函

$$L=\int_{A}^{B}\mathrm{d}s$$

积分沿过 A 和 B 的任一曲线。L 的几何意义是该曲线的固有长度。可证明，过 A 和 B 的测地线使 L 取极值。因此测地线是欧氏空间中直线概念的推广。

2.3.5. 黎曼空间的曲率张量

1. **黎曼张量**：采用克里斯朵夫联络的黎曼空间的曲率张量 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$.
2. **里契恒等式**：

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}+R^{\rho}_{\mu\nu\lambda}+R^{\rho}_{\nu\lambda\mu}=0$$

3. **对称性：**

$$\begin{array}{l}\text{对后两个指标反对称}:R_{\rho\lambda\mu\nu}=-R_{\rho\lambda\nu\mu}\\ \text{对前两个指标反对称}:R_{\rho\lambda\mu\nu}=-R_{\lambda\rho\mu\nu}\\ \text{对前后两对指标对称}:R_{\rho\lambda\mu\nu}=R_{\mu\nu\rho\lambda}\\ \text{对后三个指标反对称}:R_{\rho\lambda\mu\nu}+R_{\rho\mu\nu\lambda}+R_{\rho\nu\lambda\mu}=0\end{array}$$

4. **独立分量的个数**：

   - 只有2个指标不同: $\mathrm{C}_n^2\times 1=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

   $R_{1122}=R_{2211}=0.\ R_{1212}=-R_{1221}=-R_{2112}=R_{2121}$.

   - 只有3个指标不同: $\mathrm{C}_n^3\times 3=\dfrac{n!}{2!(n-3)!}$

   - 4个指标均不同: $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^4\times 2=\dfrac{2\mathrm{n}!}{4!(\mathrm{n}-4)!}$

   因此曲率张量独立分量的总个数

$$N=C_n^2\times 1+C_n^2\times 3+C_n^2\times 2=\frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$$

   当$n=4,N=20.$

5. 黎曼张量的缩并

   里奇张量： $R_{\mu\nu}\equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$

   标量曲率： $R\equiv g^{\mu\nu}R_{\nu\mu}=R^{\mu}_{\mu}$

   爱因斯坦张量：$G_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

   6. 空间平坦性的判据

   曲率和挠率张量是否都为零是空间是否平坦的标志。但现在采用了对称联络，即挠率张量为零。因此只需满足**曲率张量（黎曼张量）$R^{\lambda\mu\nu}_{\rho}$ 为零**即可。

   当空间是平坦的，我们总可以找到一组坐标，使得度规具有闵可夫斯度规的形式。

2.3.6. 毕安基（Bianchi）恒等式

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu}=0$$

上式表明爱因斯坦张量的协变散度恒等于零。

2.3.7. 时空的等度规 Killing矢量

Killing方程给了我们一个寻找对称的直接而系统的方法。通过构造这一微分方程的所有可能的解，我们就将找到所有的对称。**Killing矢量场的概念的作用是刻画时空结构的几何对称性质。**

2.4. 第二章重点梳理

1. 哑指标变换：
2. 推导高阶张量的协变导数公式（必须用构造标量的方法）。
3. 已知 ds^2 表达式，写出$g_{\mu\nu}$ 的分量，逆变形式$g^{\mu\nu}$
    1. 计算克里斯朵夫联络的分量
    2. 计算黎曼张量的分量
    3. 计算里奇张量
    4. 标量曲率
    5. 计算爱因斯坦张量

3. 广义相对论

- 四种相互作用:
    1. 引力相互作用
    2. 电磁相互作用
    3. 弱相互作用，
    4. 强相互作用

3.1. 等效原理

3.1.1. 等效原理的描述

1. 惯性力场和引力场的动力学效应是局部不可分辨的；
2. 物体的惯性质量等于其引力质量。

3.1.2. 广义协变原理

1. 对于描述物理规律，所有的坐标系都具有同等资格，不存在任何一个优越的坐标系；
2. 描述物理规律的方程中各项应是四维黎曼时空中的同阶张量。
3. 描述物理定律的方程在所有坐标系中应具有相同的形式.

- 狭义相对性原理：
    1. 光速不变原理：迈克尔逊-莫雷实验。

2. 狭义协变原理：一切物理定律惯性系之间的洛伦兹变换下是协变的。

3.2. 非欧几何的引入

爱因斯坦的广义协变原理要求引力定律的数学形式在任何参考系中的是相同的。引力场方程必须使由非欧几何空间量构成的方程。上述空间量就是时空的曲率张量；同时，引力场由各质点的世界线（即时空中的短程线）给出。

在爱因斯坦引力理论中，引力场是几何化的，即假定存在非欧几里德空间，受引力场作用的质点即为此空间中的自由质点。根据惯性定律，这些质点的轨迹应该是欧几里德直线的推广。在这空间中，两点间的最短距离是其间的短程线。引力场和惯性力场的等效性奠定了世界结构几何化的基础，物质分布的影响不表现为力的作用，而表现为时空的弯曲。至于欧几里德空间，则是没有物质的世界

引入非欧几里德空间，便可将相对性原理推广到加速系和由任意弯曲标架所确定的参考系。

3.3. 引力几何化

为了和Newton理论衔接，考虑一个质点在弱的定态引力场中缓慢运动的情况

3.3.1. 牛顿极限

$$g_{00} = -(1 + 2\phi)$$

其中 ϕ 是引力势。如果球的质量是 M, 则距离球心为 r 处的势等于

$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

3.4. 广义协变性和不变性

方程的协变性：一个方程被称为是广义坐标变换下协变的，如果该方程的形式在变化后保持不变。
协变性原理对物理定律的内容并没有施加限制，只是对定律写出的形式施加了限制。
要对方程的内容施加限制，需要方程的不变性。

不变性超出协变性的地方在于：它要求的不仅是方程的形式，而且还有方程的内容，在坐标变换下保持不变。

方程中所有的“常数”严格保持不变。“常数”不仅仅是指真正的数字常数，而且是指任何与物质状态无关的东西。用更好的术语把它称为**绝对客体**。作为对照，动力学客体是物理上可变化的，例如粒子的位置和动量、场强、能量密度，等等。它们与物质的状态有关。
给定任何物理定律，我们就能够把出现在其中的分量分类为绝对客体和动力学客体。所以**不变性更准确的定义**：*一个方程被称为是在坐标下不变的，如果（1）它是协变的且（2）出现在其中的绝对客体保持不变。*

Lorentz对称性的要求决定被采纳的绝对客体必须在Lorentz变换下保持不变。因而，可接受的绝对客体仅仅是标量（例如 c, h, e, m）以及张量。物理上，狭义相对论Lorentz对称性的要求意味着，观察者不能区别不同的惯性参考系。

而广义不变性原理要求物理定律具有较高的对称性，超过了Lorentz对称性的要求。广义对称性原理的一个直接结果是，我们必须**把时空度规看作是与物质状态有关的；度规张量必须是一个动力学场，满足某个属于它自己的场方程。** 唯一的选择是假定 $g_{\mu\nu}$ 不是一个绝对客体，而是一个动力学变量。

Lorentz不变性是一种代数学对称性，而广义不变性是一种动力学对称 (Weinberg 1970）

3.5. Einstein 场方程

3.5.1. 场方程的建立

由于电磁场本身不携带电荷，所以Maxwell方程是线性的。引力场带有能量和动量，因此必然对自身的场源有贡献。即，**引力场方程一定是非线性偏微分方程，而非线性代表引力对其自身的作用。**

用等效原理来处理非线性效应。在任意强度的引力场中任一点 X ，可定义这样一个局域惯性坐标系，使得

$$
\begin{gathered}
g_{\alpha\beta}(X)=\eta_{\alpha\beta} \\
\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\lambda}}\right)_{x=X}=0
\end{gathered}
$$

因此，对于接近 X 的点 x ，度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 和 $\eta_{\alpha\beta}$ 相差只是 $(x-X)$ 的二次项。在这个坐标系里，X 邻近的引力场很弱，可用线性偏微分方程来描写。**一旦知道了这些弱场方程的形式，我们就可以用使场变弱的坐标变换的逆变换来找到一般的场方程。**
但目前我们缺乏关于弱场方程的经验知识，因为物质产生和吸收引力辐射很弱。因此需要猜测。在“Newton极限”部分，我们得到：一个非相对论质量密度 ρ 所产生的弱静场里，度规张量的时－时分量近似为

$$
g_{00} \approx -(1+2\phi)
$$

其中 ϕ 是Newton势，决定于 Poisson 方程

$$
\nabla^2\phi = 4\pi G\rho
$$

其中 G 为引力常数。非相对论性物质（运动速度远小于光速）的能量密度 $T_{00}=\rho$
结合上述各式，得到

$$
\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}
$$

只假定它对非相对论物质产生的弱静场成立。
该式的形式不满足Lorentz不变性。但上式启发我们猜测，对于一般的能量－动量分布$T_{\alpha\beta}$，弱场

方程取如下形式

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}$$

式中 $G_{\alpha\beta}$ 是度规和它的一阶及二阶导数的线性组合。于是，由等效原理推得支配任意强度的引力场的方程必取如下形式

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3}$$

式中 $G_{\mu\nu}$ 是在弱场时化为 $G_{\alpha\beta}$ 的一个张量。

一般说, 有许多张量 $G_{\mu\nu}$ 都可以由度规张量及其导数组成, 并且在弱场极限下化为给定的 $G_{\alpha\beta}$ 。想象把 $G_{\mu\nu}$ 展开为度规导数乘积之和，并按度规分量导数的总阶数 N 将每一项进行分类 (例如, $N=3$ 的项是与度规 的三阶导数成比例的项，或是一个一阶导数和一个二阶导数的乘积, 或是三个一阶导数的乘积）， 整个 $G_{\mu\nu}$ 必须有二阶导数的量纲, 所以每一个 $N \neq 2$ 类型的项都要乘上一个常数, 其量纲是长度的 $\mathrm{N}-2$ 次方。

当引力场的空一时尺度充分大时, $N>2$ 的项可忽略；当引力场的空一时尺度充分小时，$N<2$ 的项可忽略。为了去掉 $G_{\mu\nu}$ 的不确定性，假设引力场方程在尺度上是均匀的。因此只允许 $N=2$ 的项。

- 对于场方程左边，我们目前知道：
  1. 根据定义，$G_{\mu\nu}$ 是一个张量。
  2. 根据假设，$G_{\mu\nu}$ 只由 $N=2$ 的度规的导数项组成，即它只含二阶导数或者与度规的二阶导数成比例的项，或者是度规的一阶导数的平方项。
  3. 由于 $T_{\mu\nu}$ 是对称的，所以 $G_{\mu\nu}$ 也是对称的。
  4. 由于 $T_{\mu\nu}$ 是守恒的（在协变微分的意义上），所以 $G_{\mu\nu}$ 也守恒

  $$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

  满足 1和 2 的场的最一般的方法就是缩并曲率张量 $R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$. 其反对称性质表明，只有两个张量可以由其缩并造成：Ricci张量 $R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$ 和标量曲率 $R = R^{\mu}_{\mu}$ ，因此 1 和 2 要 求 $G_{\mu\nu}$ 取如下形式

  $$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$$

  式中 $C1$ 和 $C2$ 是常数。上式自动满足对称要求（ Ricci张量对称），所以并不提供新的东西。利用毕安基恒等式，得到 $G^{\mu}_{\nu;\mu}$ 的协变散度为

  $$G^{\mu}_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu}$$

  所以 4 允许有两种可能: $C_2 = -C_1/2$, 或者 $R_{;\nu}$ 处处为零 (变成欧式几何)。所以第二种可能性可以排除, 因为

  $$G^{\mu}_{\mu} = (C_1 + 4C_2) R = -8\pi G T^{\mu}_{\mu}$$

如果 $R_{;\nu} \equiv \partial R/\partial x^{\nu}$ 等于零, 则 $\partial T_{\mu}^{\mu}/\partial x^{\nu}$ 也必然等于零。但存在非均匀、非相对论物质时并非这种情况。所以, 可断定 $C_2 = -\dfrac{C_1}{2}$, 因此

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \tag{2}$$

- 最后, 利用性质 (E) 来确定常数 C_1 。
  一个非相对论系统总有 $T_{ij} \ll T_{00}$，所以只涉及 $G_{ij} \ll G_{00}$ 的情况，或者利用

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R$$

此外这里讨论的是弱场，所以 $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ ，于是标量曲率为

$$R \approx R_{kk} - R_{00} \approx \frac{3}{2} R - R_{00}$$

即

$$R \approx 2R_{00}$$

因此

$$G_{00} \approx 2C_1 R_{00} \tag{1}$$

为了算出弱场的 R_{00} ，取曲率张量表达式的线性部分

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\mu}} \right)$$

当场是静态时，所有的时间导数都为 0 , 并且

$$R_{0000} \approx 0$$

再由里契张量的表达式

$$\begin{aligned}
& R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\nu\lambda} \\
\Rightarrow & R_{00} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha 00 \lambda} \\
& = g^{00} R_{0000} + g^{11} R_{1001} + g^{22} R_{2002} + g^{33} R_{3003} \\
& = R_{i00j} - R_{0000} \\
& = R_{i00j} \quad (i = j = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

而由里契张量的对称性

$$R_{1221} = -R_{1212}$$

得

$$R_{00} = -R_{i0j0}$$

将 R_{00} 的表达式带入(1)式得

$$
\begin{aligned}
G_{00} &\approx 2C_1 R_{00} \\
&= -2C_1 R_{i0j0} \\
&= -2C_1 \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x \partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial z^2} \right) \quad (i=j=1,2,3) \\
&= -C_1 \nabla^2 g_{00}
\end{aligned}
$$

与 PPT-03中的计算相矛盾。
假设 $G_{00} = C_1 \nabla^2 g_{00}$，与式(1)比较，发现 当且仅当 $C_1 = 1$ 时 (E) 成立。

- 由此，(1) 式化为

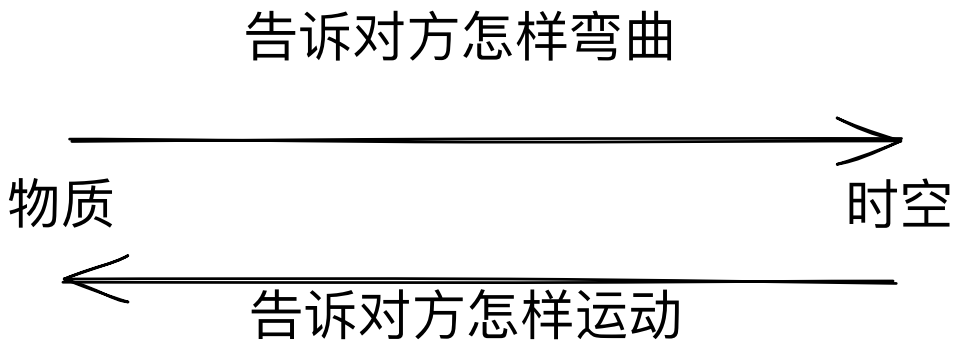
$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R
$$

再利用 (3) 式，便得到 **Einstein 场方程**

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}
$$

方程的左边描述了空间的弯曲状况；右边描述了物质的分布和运动状况。$T_{\mu\nu}$ 是物质的**能量-动量张量**，描写引力场源的能量和质量分布。
引力场方程式貌似简洁，但爱因斯坦张量是度规以及它的一阶、二阶导数的非线性函数，这个紧凑的表达式把引力场复杂的非线性隐藏在爱因斯坦度规张量中。

爱因斯坦引力场方程把时空弯曲和物质的能量-动量张量联系起来，其本质可以用一张简图来说明:



所以爱因斯坦引力场方程有双重角色---既是场方程又是运动方程。
爱因斯坦的引力理论“广义相对论”将引力解释为时-空弯曲。有质量的物体可以导致时空弯曲，一个物体穿过弯曲的时空时，将遵循一条最短路径——测地线。这就是引力相互作用的本质。

- 有时用到场方程的另一种形式。

$$
R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda} \right)
$$

- 真空中的 $T_{\mu\nu}$ 为零, 所以从 (3.5.15) 得到真空中 Einstein场方程为

$$R_{\mu\nu} = 0$$

在二维或三维空一时中, 这就意味着整个曲率张量 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ 为零, 因而没有引力场。只有在四维或更高维的情形, 在真空中才能存在真实的引力场。

3.5.2. 场方程的求解

爱因斯坦引力场方程是高度非线性的，一般很难严格求解，只有对时空度规附加一些对称性（如球对称，轴对称等）或附加一些特殊要求时，使方程大大简化，才能求解。否则只能发展一些系统近似法（如弱场近似等）得到一些近似解。举例如下

- 精确解:
  1. 史瓦西解：球对称引力场和史瓦西度规
  2. 克尔解：克尔度规或称克尔真空(Kerr vacuum) 是广义相对论中描述的一旋转之质量庞大物体（例如：克尔黑洞）周遭的时空几何。其为爱因斯坦场方程的精确解，故又称克尔解。
- 近似解：
  后牛顿近似（Parameterized Post-Newtonian Formalism），这是爱因斯坦等人建立起来的求解引力场方程的近似解方法。适用于由引力束缚在一起的缓慢运动的质点系统。

3.6. 引力波

爱因斯坦引力场方程意味着引力场的扰动将以有限的速度传播，称为引力波。引力波的预言是爱因斯坦广义相对论的重要结论之一。
引力波提供了继电磁辐射、宇宙线和中微子之后探测宇宙奥秘的又一重要手段，对天文学的研究有极为重要的意义，导致了引力波天文学这一观测宇宙新窗口的诞生

- 1916 年爱因斯坦就根据弱场理论预言了引力波的存在。
- 上世纪50年代末发展了同坐标选取无关的引力辐射理论，求出了严格的波动解。
- 其后又证明检验粒子在引力波作用下会产生运动，表明引力波携带能量。
  引力波不是一种同坐标选取有关的符号, 它是真实的。

3.6.1. 引力波理论基础

- 引力波理论认为，当物质运动，或物质体系的质量分布发生变化时就会发出引力辐射。就像水池中波纹一样，引力波是时-空中的涟漪。
- 我们可以把任何物质系统（称之为波源）的质量分布分解成质量多极矩的形式，则引力波是由于质量多极矩随时间变化时辐射出去的。
- 源的质量流四极矩随时间的变化所产生引力辐射也是引力辐射最大项的组成部分。

3.6.2. 引力波方程

引力波所满足的方程可以从爱因斯坦引力场方程推导出来. 在爱因斯坦引力场方程中

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

时空度规张量 $g_{\mu v}$ 在弱场近似的情况下，可写成闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu v}$ 加上一个小的微扰项 $h_{\mu\nu}$ 来表示:

$$g_{\mu v}=\eta_{\mu v}+h_{\mu v}\quad(h_{\mu\nu}|<<|\eta_{\mu v}|)$$

将它代入引力场方程得到

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}$$

在真空情况下, 此方程就变为

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_{\mu\nu}=0$$

该方程最简单的解是平面波。

3.6.3. 引力波的性质

- 由波动方程的解我们可以知道引力波具有如下特性：
  1. 引力波在引力理论中的位置与电磁波在电磁学中的作用类似。像电荷的电多极矩一样，也可以写出引力波源质量分布的多极矩。引力波是质量多极矩随时间变化时发射的；
  2. 引力波的第一项是来自质量四极矩随时间的变化；
  3. 引力波是横波；
  4. 引力波有两个极化方向 h_+ 和$h_\times$，分别称为加号偏振、叉号偏振；

  引力波的强度通常用无量纲振幅 $h(t)$ 表示

  $$h(t)=F^+h_+(t)+F^\times h_\times(t)$$

  其物理意义是引力波引起的时空畸变与平直时空度规之比. $h(t)$ 又称**应变 (Strain)**。应变可以用引起物体长度的变化与物体的尺寸之比来表示

  $$h_+(t)=\delta L/L$$

  引力波的应变很弱，约为 $h=10^{-21}$ 量级。

3.6.4. 引力波天文学

天文学的研究是基于对天体辐射的探测。

- 根据被测辐射类型的不同可分为：

1. 电磁辐射天文学（当代天文学的主流）
   从遥远天体发射的电磁辐射，必须穿过大气层才能到达地面。大气层对电磁波的很多波段会产生强烈的吸收，使得大气层对这些波段是不透明的。**幸运的是大气层对可见光（光学窗口）、波长为 $30m-1mm$ 的射电波（射电窗口）和部分红外线是透明的**，传统的电磁辐射天文学才能通过这些窗口得以存在和发展。
2. 宇宙线天文学
   宇宙线是来自宇宙空间的高能粒子流，由超新星、耀变体等天体活动产生。大约89%的宇宙线由质子构成，10%由氦原子核（即α粒子）构成，还有极小一部分由电子、γ射线或超高能中微子构成。宇宙线天文学便是探测天体辐射出的这些粒子，进而对天体活动进行研究的学科。
3. 中微子天文学
4. 引力波天文学
   - 引力波在传播过程中基本上不被吸收、不被散射、不被屏蔽，它可以将观测领域扩大到被宇宙尘埃弄暗，或被其他物质屏蔽的宇宙区域，发现新的天体和物质体系，更加明晰地揭示宇宙真面目。
   - 根据宇宙大爆炸理论，引力波是在大爆炸后 10^{-43} 秒。与物质分离的，是随机背景引力波的重要组成部分，它的探测能给我们提供宇宙最早状态的信息。（原初引力波）
   - 电磁辐射天文望远镜只能观测天空的一小部分，而且一般都在晴朗的夜间工作，还受天气和环境状态的影响。引力辐射探测器在阴雨天气和白天都能正常运转，它甚至能够探测从地球的另一面穿透而来的引力波信号。可以说，它是一种全天候、全方位、经常性的观测。可探测到剧烈天体变化的全面貌。

4. 观测量的理论

在广义相对论中，需要一个理论来说明某一个观测者在他的局域参考系中所测得的物理量与张量性物理理论中所得到的物理量之间的关系，

4.1. 观测量作为标量

- 测量中，我们面对四个因素：
  1. 确定的观测对象；
  2. 事件发生点的时空几何性质；
  3. 确定的参考系；
  4. 为表述该物理量和该观测者运动情况的坐标系。
  观测结果依赖于前三个因素，但与第四个因素无关。即**观测量必定是一个标量。**

4.2. 时空间隔的测量和投影算符

证明时间间隔 ΔT 和空间距离 ΔL 是标量。

4.3. 物理的坐标系

- 在GR中，通常不能建立全局性的统一时间。
- 空间距离的概念对相邻点有确切的含义，对有限间点距通常没有确切的含义。

5. 球对称的引力场

5.1. 球对称度规场的一般结构 史瓦西外部解

- 如果物质分布是球对称的，这一物质分布所产生的引力场必定也是球对称的。
- 如果质量分布是静止的并且没有转动，引力场必定也是静态的。
- 一个场被称为是静态的，必须同时满足时间无关和时间对称两个条件，后者即时间反演不变。
- 对于一个球对称的场，自然是应用球坐标 。
  - 角坐标是明确的：这两个坐标的测量，只取决于外面把一个以原点为中心的圆周分成等份的能力。即使在不知道度规的情况下，我们也能做到；
  - “径向”坐标 r ： 含义是不明确的，因为我们不知道它和距离测量的准确关系。“时间”坐标 t 也有类似的不确定性。
  球对称度规为在三维空间正交变换（转动或反射）下，线元（或度规张量）形式不变的度规。
- 球对称度规的最普遍形式。

$$ds^2 = b(r,t)c^2dt^2 - a(r,t)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

- 为求解Einstein方程, 通常把 b 和 a写出指数形式 (因为这将简化计算中的某些表示式）：

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\mu(r,t)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{1}$$

  上式只考虑了度规场的几何对称性和坐标选取的任意性。为完全确定度规，需用Einstein 引力场方程来确定任意函数 $\nu(r,t)$ 和 $\mu(r,t)$ 。 如果是静态 (或称稳态) 场，则有

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\mu(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

  由 (1) 式，取

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

  可得度规为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\mu(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

逆变形式

$$g^{\mu\nu}\cdot g_{\mu\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}$$

写成分量形式

$$g_{00}=e^{\nu},g_{11}=-e^{\mu},g_{22}=-r^2,g_{33}=-r^2\sin^2\theta$$
$$g^{00}=e^{-\nu},g^{11}=-e^{-\mu},g^{22}=-\frac{1}{r^2},g^{33}=-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

- 求曲率标量 R
  通过 2.3.3 节 Christoffel 联络的定义，写出其所有非零分量如下

$$\begin{array}{lll}\Gamma^0_{01}=\Gamma^0_{10}=1/2\nu' & \Gamma^1_{00}=1/2\nu' e^{\nu-\mu} & \Gamma^1_{11}=1/2\mu'\\ \Gamma^1_{22}=-re^{-\mu} & \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\mu} & \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=1/r\\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta & \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=1/r & \Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\cot\theta\end{array}$$

进而利用度规和 Christoffel 符号，由曲率张量的表达式写出曲率张量的非零分量

$$\begin{aligned}R^0_{101}&=-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\mu'\nu'-\frac{1}{4}\left(\nu'\right)^2\\ R^0_{303}&=-\frac{1}{2}r\nu' e^{-\mu}\sin^2\theta\\ R^1_{313}&=\frac{1}{2}r\mu' e^{-\mu}\sin^2\theta\\ R^0_{202}&=-\frac{1}{2}r\nu' e^{-\mu}\\ R^1_{212}&=\frac{1}{2}r\mu' e^{-\mu}\\ R^2_{323}&=\left(1-e^{-\mu}\right)\sin^2\theta\end{aligned}$$

再由 Ricci 张量的表达式

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda}+\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}$$

得到其非零分量；也可以由黎曼张量缩并得到。

$$\begin{aligned}R_{00}&=e^{\nu-\mu}\left[-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\mu'\nu'-\frac{1}{4}\left(\nu'\right)^2-\frac{\nu'}{r}\right]\\ R_{11}&=\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\mu'\nu'+\frac{1}{4}\left(\nu'\right)^2-\frac{\mu'}{r}\\ R_{22}&=e^{-\mu}\left[1+\frac{1}{2}r\left(\nu'-\mu'\right)\right]-1\\ R_{33}&=\sin^2\theta e^{-\mu}\left[1+\frac{1}{2}r\left(\nu'-\mu'\right)\right]-\sin^2\theta\end{aligned}$$

最后，缩并 Ricci 张量得到曲率标量

$$
\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= e^{-\mu}\left[-\nu'' + \frac{1}{2}\mu'\nu' - \frac{1}{2}\left(\nu'\right)^2 + \frac{2}{r}\left(\mu' - \nu'\right) - \frac{2}{r^2}\right] + \frac{2}{r^2}
\end{aligned}
$$

真空中的爱因斯坦方程

$$
R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = 0
$$

利用缩并

$$
R_\mu^\nu = g^{\nu\alpha}R_\alpha
$$

得到一个二阶齐次非线性常微分方程组。这方程组只有两个互相独立，其余两个可以作为解的检验。解得

$$
\begin{aligned}
\mu &= -\nu \\
e^{\nu(r)} &= 1 - C/r
\end{aligned}
$$

代入到之前的时空间隔表达式，得

$$
ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - C/r} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)
$$

- 再确定积分常数
  注意到

$$
g_{00} = e^{\nu(r)} = 1 - \frac{C}{r}
$$

比较在牛顿近似的结果，发现

$$
C = 2GM
$$

所以得到 Schwarzshild 解为

$$
ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(\frac{1 - 2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)
$$

该解的前提是满足天体的自转很小。

- 质量M是系统的总质量
- 引力质量贡献的质量-能量也包括在 M 之中。显然，除非 M 是系统的总能量，等效原理 $(M_I = M_G)$ 就不能满足

5.2. 伯克霍夫定理

- 对 *Schwarzschild* 解的推导假设 **度规 (1)是球对称 (2)是静态的**。后一个假设实际上是不需要的，因为它暗含在前一个假设之中

- **Birkhoff 定理：Einsten 方程的任何球对称真空解必定是静态的，而且必须与 Schwarschild 解一致。**
- 作为这一定理的一个结果，**球对称质量分布在其周围区域产生的场总是静态 Schwarzschild 场，无论该质量是静态的、坍缩的、膨胀的或者脉动的。**（这一表述暗含着一个假定，即质量分布中没有净电荷；如果有净电荷，则周围空间将存在电场，而且真空条件 $T_{\mu\nu}$ 将被违反。
- Birkhoff 定理的意义：Schwarzschild 解描述的是球对称源的外引力场，但这个源不必是静止的。因此，**当观测到一个 Schwarzschild 引力场，我们无法判明它的源是一个稳定的，还是一个膨胀、收缩、振荡的。**
- 作为该定理的一个推论，**一个球对称质量分布在其中心的球形空腔中不产生引力场。**【这一结论在Newton理论中是当然成立的：利用势函数的唯一性定理可以证明，一个均匀的球壳在其内部所产生的势是常数。】在 Einstein 理论中，Birkhoff 定理保证了空腔内部的解必定是 Schwarzschild 解。因为一个空腔不能含有任何奇点，我们必须取 $C=0$，因此*在空腔内部时空是平直的。*

5.3. 史瓦西坐标的物理意义

6. 广义相对论的经典检验

笔记未记录，只记录下我们的小组汇报，题目与该部分相同。

1. 题目回顾

请说出目前有哪些间接和直接的实验检验了GR。为什么至今人们还热衷于检验GR?

---

2. 分工

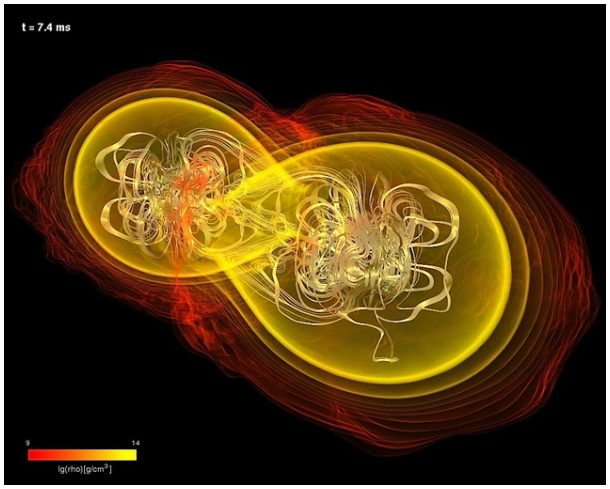
汤子凡	王超
引力波的探测	水星近日点、光线在引力场中的偏转、光谱线的引力红移、雷达回波延迟、脉冲双星的观察

3. 引力波

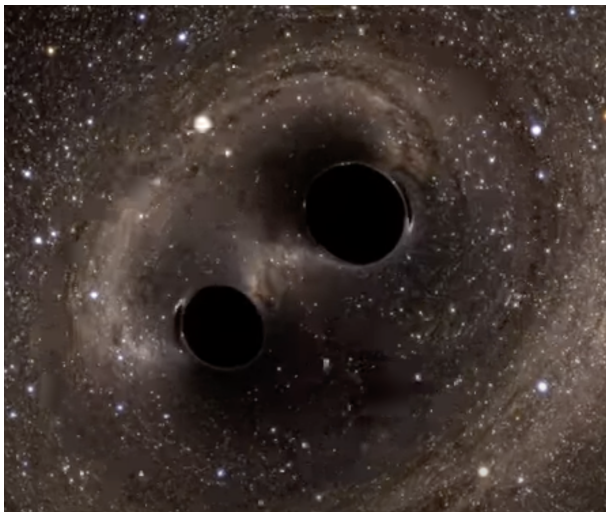
3.1. 理论介绍

- Albert Einstein *predicted the existence of gravitational waves* in 1916 in his general theory of relativity.

- Massive accelerating objects would disrupt space-time in such a way that 'waves' of undulating space-time would propagate in all directions away from the source. 'RIPPES' in space-time.
- 宇宙“涟漪”将以光速传播，携带有关其起源的信息，以及引力本身性质的线索。
- 分类 Based on what generates them:
    1. Continuous
    2. Compact Binary Inspiral
        - Binary Neutron Star (BNS)



        - Binary Black Hole (BBH)



        - Neutron Star-Black Hole Binary (NSBH)
    3. Stochastic
    4. Burst.

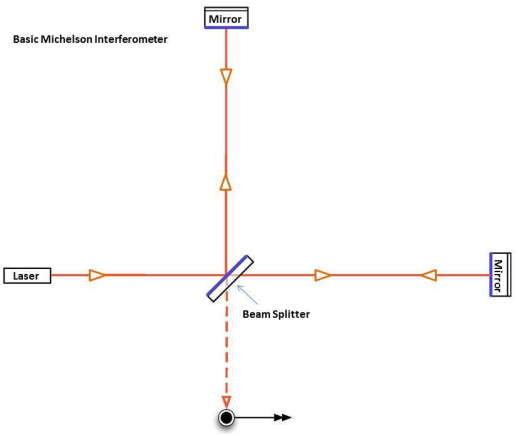
3.2. 实验验证

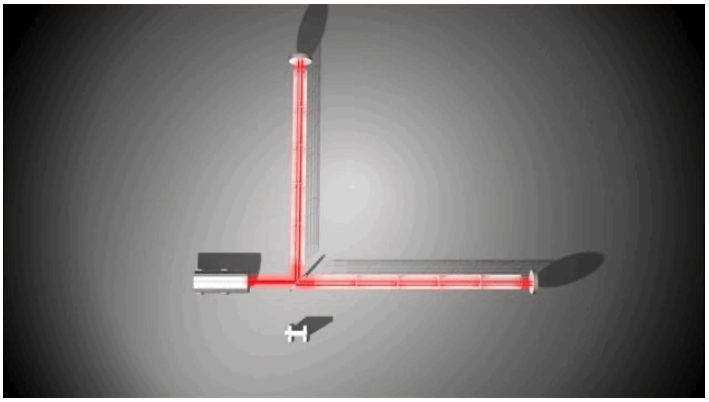
3.2.1. LIGO

- LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*)激光干涉仪引力波天文台
  The world's largest gravitational wave observatory.

3.2.1.1. LIGO的设计原理[1]

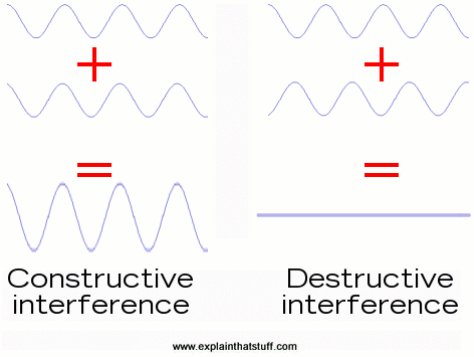
1. 引力波造成空间弯曲 ⇒ 探测臂发生差动位移 (differential displacement），臂不等长
   If the beams travel exactly the same distance, their light waves will be perfectly aligned so that they result in total *destructive* interference. But the gravitational waves cause space *itself to* stretch in one direction and simultaneously compress in a perpendicular direction. In LIGO, this causes one arm of the interferometer to get longer while the other gets shorter, then vice versa, back and forth as long as the wave is passing.

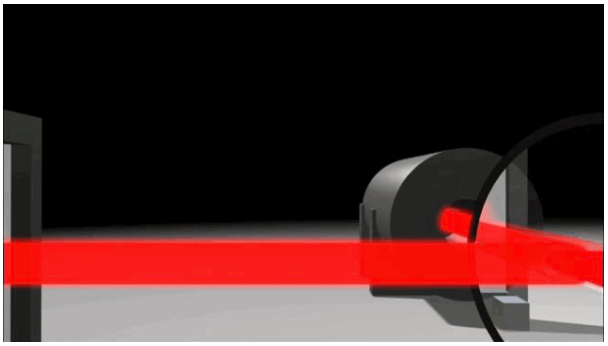




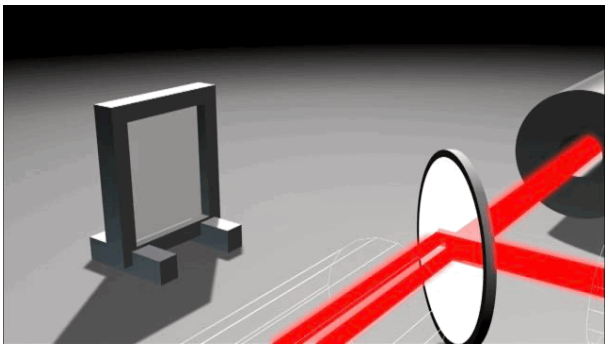
2. 两束相干激光的光程差改变 ⇒ 相位差改变。
   When the peaks of two waves meet, their peaks add up. When the peaks of one wave

meet the valleys of another identical wave, they cancel out.





3. 光电探测器探测到光的闪烁。
   a flicker appears as the beams experience a range of interference depending on how they are meeting up in any given moment.



3.2.1.2. 困难和解决措施

1. 不够灵敏：Longer is better
   $4\mathrm{km}$ 的光程并不能足够灵敏地观测到引力波引起的空间畸变。

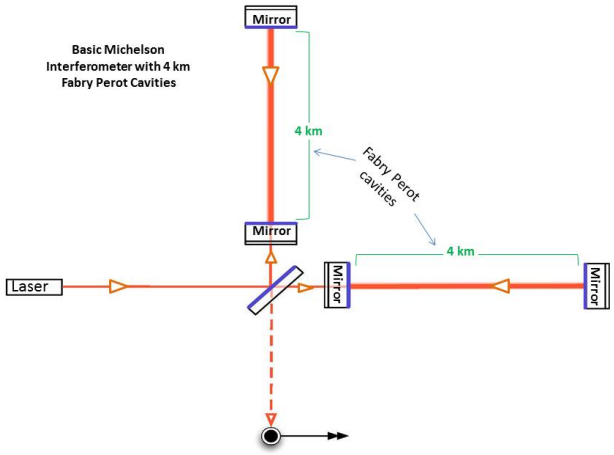
- 在非相对论情况下作粗略估计
  $\lambda = 1064\mathrm{nm}$，LIGO 号称可以做出这个波段最稳定、最纯的激光。
  已知引力波引起的差动位移 $d = hl$ 所引起的光程差为[2]

$$
\begin{aligned}
\Gamma = 2d &= 2h \cdot l \\
&= 2 \times 10^{-23}\mathrm{m/m} \times 4 \times 10^{3}\mathrm{m} \\
&= 8 \times 10^{-20}\mathrm{m} \\
&\sim 10^{-19}\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

考虑到干涉仪内部的反射会带来 $\dfrac{\lambda}{2}$ 的光程差, 若想观测到相长干涉，光程差为

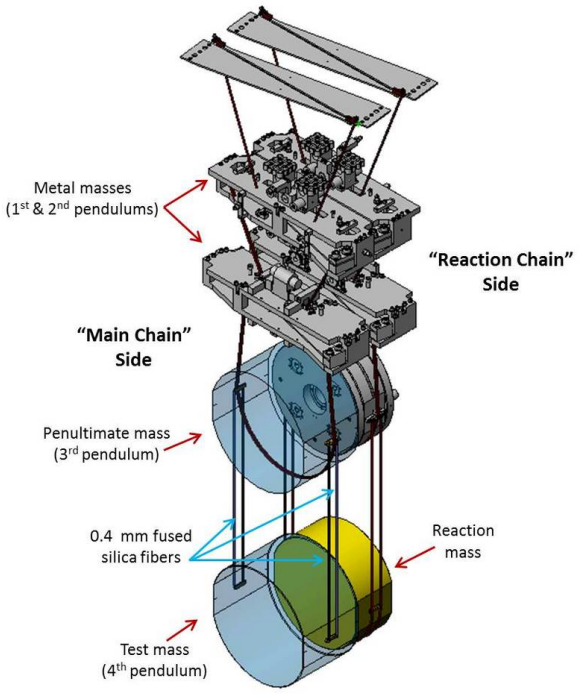
$$
\begin{aligned}
&\Gamma = 2d \geq \frac{k}{2}\lambda, \quad k = 1, 2, 3 \\
\Rightarrow\ & d \geq \min\left\{\frac{k\lambda}{4}, k = 1, 2, 3, \dots\right\} \geq \frac{\lambda}{4} = 216\mathrm{nm} \\
\Rightarrow\ & d \geq 2 \times 10^{-7}\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

二者数量级相差了 10^{-12}.
因此，为了提高灵敏度，引入法布里-帕罗谐振腔。如图所示



激光在探测臂中多次反射 $\Rightarrow$ 放大引力波引起的长度变化。LIGO : 总共反射300次，激光光程达到了$1200\mathrm{km}$. 同时这两面反射镜也会让激光能量不断在谐振腔中汇聚.
2. 噪音太大：悬挂系统+异地联合观测
卡车在附近的道路上行驶、农民耕种田地、地震、海啸：一切人听到和感觉到的震动。

- 40kg的镜子和4级悬挂系统隔绝噪音的影响。



- 异地联合观测
  Blue: LIGO Hanford, southeasternWashington, the United State.

Red: LIGO Livingston，Louisiana, the United State.
相距较远的设施不会感受到相同的局部振动，但它们会（几乎同时，相差10ms）感受到引力波振动。通过比较来自两个地点的数据，科学家们可以忽略不同地点之间的振动，而只寻找在两个地点同时发生的相同信号。这就是为什么两个或更多检测器必不可少的原因。一个充当另一个的噪声过滤器，只留下来自引力波的信号作为突出点。

- LIGO合作的天文台
  - VIRGO, Pisa, Italy, with arms 3 km long

  - KARGA, inside of the Kamioka minewith arms 3 km long,
    (also home to the Super Kamiokande neutrino detector)

3. 真空管道：消除其他因素的影响

- 防止声波在镜子上引起振动；
- 防止管内发生温度变化改变镜子的形状；
- 防止管内的任何气流导致激光折射。
  经过 1100 小时（40 天）的恒定抽气，将 LIGO 的真空管抽真空至其理想工作压力（大气压

的万亿分之一）。管子本身被加热到150-170 °C 30天，以驱除残留的气体和水分。

3.2.1.3. 探测成果

2015年，自从经历了名为先进LIGO的重大升级项目后，在第一次观测运营期间就在9月首次直接观测到了引力波，同年12月又第二次观测到了。第三次检测，被称为GW170104，是在今年1月4日实现的，已发表在近期的物理评论快报上。
在所有三次检测中，LIGO的两个检测器都检测到了黑洞对融合产生的引力波。这种碰撞产生的能量比宇宙中任何恒星和星系在任何时刻以光形式放射的都要多。最近的这次检测似乎是至今为止最远的，有30亿光年远（第一次和第二次的分别是13亿和14亿光年远）。

3.2.2. LISA、天琴计划与太极计划

- 激光干涉空间天线（*Laser Interferometer Space Antenna，LISA*）是一个由 NASA 和 ESA 合作的引力波探测计划，计划于2015年投入运行，这本将是人类第一座太空中的引力波天文台。但 2011 年 4 月 26日，NASA和ESA官员称，空间引力波联合探测任务已被正式取消，原因是NASA经费吃紧，难以提供所需出资（美国吃独食？）
- “天琴计划”是中国科学院院士罗俊于 2014 年 3 月在华中科技大学的一次国际会议上提出，2015 年 7 月在中山大学发起，以中国为主导的国际空间引力波探测计划。其目标是在 2035 年前 后，在约 10 万公里高的地球轨道上，部署 3 颗全同卫星，3 颗卫星将构成边长约为 17 万公里的 等边三角形编队，建成空间引力波天文台“天琴”，开展引力波的空间探测，进行天体物理、宇宙学及基础物理前沿研究。**“天琴一号”已于 2019 年 12 月 20 日成功发射，并实现了所有预期目标。**
- 2016 年，中国科学院提出了我国空间引力波探测“太极计划”。类似欧美 LISA 计划，“太极计划”的 3 星编队轨道是以太阳为中心，设计干涉臂臂长即卫星间距 300 万公里。“太极计划” 对卫星的稳定性提出了更高要求，3 颗卫星必须构成超稳超静平台。2019 年 8 月 31 日，我国首颗空间引力波探测技术实验卫星“太极一号”成功发射，标志着“太极计划”第一步任务目标已成功实现。

3.3. 为什么人们至今仍然热衷于检验广义相对论?

- 广义相对论难以被观测，曾被大多数人怀疑。
“瑞典皇家科学院决定授予您去年的诺贝尔物理学奖，这是考虑到您对理论物理，特别是光电效应定律的工作，但是没有考虑您的相对论与引力理论**在未来得到证实之后的价值。”**
("*for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.*")[3]
- ...

---

1. https://www.ligo.caltech.edu/↩
2. B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102, 11,February 2016, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102↩
3. https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/summary/↩