

# 雲南大學

## 本科生期末论文

题目 宇宙学常数与真空能

姓名 汤子凡

学院 物理与天文学院

学号 20201050279

专业 物理学

指导教师 王俊

2023 年 5 月

## 摘要

本文是云南大学专业选修课《物理宇宙学》期末论文。本文首先回顾了 Einstein 提出场方程的历史，由此引出宇宙学常数问题。然后，回顾了量子场论的发展过程，在其中也涉及到了真空能的讨论，并且可以把真空能与宇宙学常数自然地联系起来。所以，接下来我们列举了四个证明真空量的实验现象，包括 Casimir 效应、Lamb 位移、自发辐射和真空极化。最后，我们介绍三个试图解释宇宙学常数问题的理论：超对称理论、人择原理和暗能量的标量场理论。

**关键词：** 宇宙学常数，真空能

## 1. 宇宙学常数问题

1915 年, Einstein 建立了广义相对论的场方程。1917 年他又向场方程中引入一个宇宙学参数。含有宇宙学常数的场方程的一般形式是

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

其中  $R_{\mu\nu}$  是 Ricci 张量,  $g_{\mu\nu}$  是特定引力时空的度规,  $\Lambda$  是宇宙学常数,  $T_{\mu\nu}$  是描述物质分布的能量-动量张量。两边取迹, 得

$$-R + 4\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

再联立(1)式, 即得

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (3)$$

宇宙在大尺度结构上表现出均匀和各向同性的性质, 这要求我们用 FLRW 度规去描述引力时空的几何性质

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4)$$

其中  $a$  是减速因子。代入(2), 得到 Friedmann 方程

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (6)$$

如果没有宇宙学常数, 考虑一个稳态的宇宙, 即尺度因子不随时间变化,  $a = \text{const.}$ , 那么 Friedmann 方程的空间分量式给出

$$\rho = -3p = \frac{3K}{8\pi G a^2}, \quad (7)$$

所以当 Einstein 首先试图建立稳态宇宙时, 他认为这种负压强(或负密度)的解无意义。所以, 他在场方程的中加入了宇宙学常数  $\Lambda$ , 这得到

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \frac{K}{a^2} = \Lambda, \quad (8)$$

可以看到, 宇宙学参数项提供了斥力, 斥力和引力抗衡使得宇宙静止。

但是, 1923 年 Slipher 的观测表明, 多数星体的光谱呈现红移, 如果用 Doppler 效应解释, 那么这表明星系在离我们而去<sup>[12]</sup>。随后在 1929-1931 年间, Hubble 也观测到了同样的情况, 并提出了哈勃定律。这些观测证据都表明宇宙不是静止的而是膨胀, 所以爱因斯坦放弃了宇宙学常数。

然而，上世纪末人们对超新星的研究发现：**宇宙是在加速膨胀的**。1989年，当 Nørgaard-Nielsen 等人观测到红移  $z \sim 0.31$  的超新星以后，超新星开始被用来确定宇宙的减速因子。此后，两个独立的小组 Supernova Cosmology Project (SCP) 和 High-z Supernova Search Team (HST) 致力于寻找遥远的超新星，以便确定宇宙学参数。他们发现相比于低红移的超新星样本，远处（高红移）的超新星比  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  模型所预言的要暗得多，但是与真空能  $\Lambda$  占主导的平直的宇宙模型  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  符合得很好<sup>[7]</sup>。

所以，人们又开始重新考虑宇宙学常数项。可以引入等效真空能密度（或称修正的能量密度）

$$\rho_\Lambda = \rho_{\text{vac}} + \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (9)$$

宇宙学常数是否存在要通过天文观测来检验。虽然目前为止，宇宙学常数模型几乎符合所有的天文观测。然而这一模型面临着一个严重的理论困难，即所谓的宇宙学常数问题。从旅行者一号探测卫星测量到的数据结合  $\Lambda$ CDM 模型所推断出的真空能量密度上限（或临界密度）为

$$\rho_\Lambda = 10^{-47}(\text{GeV})^4, \quad (10)$$

而从量子场论估算出的零点能密度为

$$\rho_{\text{vac}} = 10^{74}(\text{GeV})^4, \quad (11)$$

两个数值难以置信地相差了121个数量级。这意味着  $\Lambda$  的大小要确定到 120 位之后，如果在前 120 位中有一个小改变，就会让  $\rho_\Lambda$  变化非常大，也会完全颠覆宇宙的演化规律。如果我们宇宙中的某些条件稍有不同，生命将永远不会进化或者说宇宙是为我们而造的，这样的结论是令人难以接受的。在宇宙学里，这差异称为**真空灾变 (Vacuum Catastrophe)**。物理学者认为这是当今物理理论的重大瑕疵。

## 2. 从量子场论的视角

我们还可以从量子场论的发展历程中窥见对真空的讨论。量子场论大概要追溯到从 P. Dirac 在 1926 年建立了描述相对论性的电子运动理论的 Dirac 方程开始

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0, \quad (12)$$

其中  $\psi$  是粒子的波函数。这方程有两个解<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0) \\ \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0) \end{cases} \quad (13)$$

如果  $e^{-iEt/\hbar}$  是 Schrödinger 方程中本征值为  $E$  的量子态的时间因子，即  $E = mc^2$ ,

那么  $\psi_B(t)$  就出现了难以解释的问题：它应该代表一个带负能量的状态。Dirac 的解释是：假定有无穷多的不可见的携带负能量的粒子海填充着这些态。这就是 Dirac 预言正电子。正电子在最初并不被视为一种新粒子，而是在无限电子海中的空穴，因此这一理论也称为“狄拉克空穴理论”。但是 Gamow 等认为这个解释不正确，这样的“电子海”将有很大的密度，会产生很强的引力的。

随后发展起来的量子场论很自然地描述了这一现象。量子场论是结合了量子力学、狭义相对论和经典场论的一套自洽的概念和工具，将粒子视为场的激发态，粒子之间的电磁相互作用或者弱相互作用则是通过交换媒介粒子实现的。从量子场论的视角看，宇宙学常数的出现有一个很自然的解释，那就是真空能的密度。场处于基态，对应的就是真空。但是在真空中时刻发生着虚粒子对的产生和湮灭。所以量子场论预言，真空中存在着许多与能量涨落有关的可观测效应。图 1 是描述电子对湮灭的费曼图。

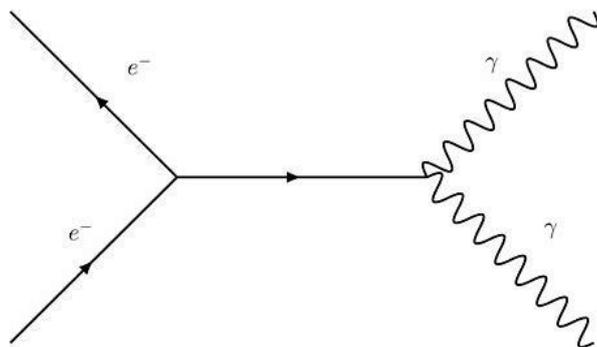


图 1 电子对湮灭的 Feynman 图<sup>[11]</sup>

量子场论之后，量子引力在 20 世纪 70 年代发展起来了。当前主流的是超弦理论（String Theory）和圈量子引力理论（Loop quantum gravity）。超弦理论假设基本粒子是一维弦，自然界中的各种不同粒子都是一维弦的不同振动模式。Abhay Ashtekar, Carlo Rovelli 和 Lee Smolin 于 1986 年左右开始试图发展圈量子引力，也称为圈引力和量子几何。它试图调和量子力学和广义相对论的理论，保留了广义相对论的许多重要特征，同时在量子力学的传统中采用普朗克尺度的空间和时间量子化<sup>[5]</sup>。粗略地说，在该理论中，所有其他物理现象发生的空间都被量子化了。这两种理论并没有解决所有物理力的统一问题，而且也都没有被实验所证实。但是人们仍然期待他们可以为宇宙演化和宇宙学常数问题带来启示。

### 3. 真空能存在的实验验证

许多实验证明了真空能的存在，包括 Casimir 效应、原子或核子的光自发辐射、原子能级的 Lamb 位移、电子旋磁比的异常值等。这些效应都可以用量子力学或量子场论解释。

### 3.1 Casimir 效应

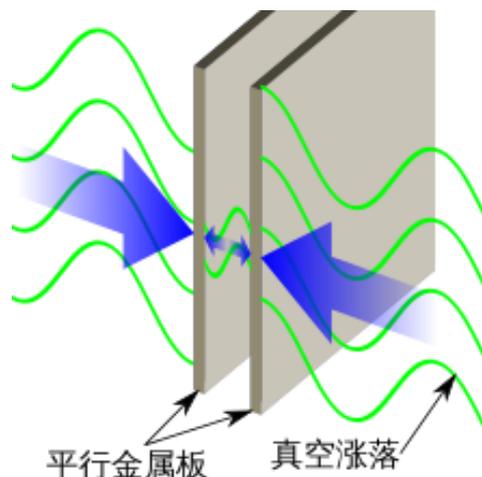


图 2 卡西米尔效应示意图

Casimir 效应由荷兰物理学家 Hendrik Casimir 在 1948 年提出<sup>[8]</sup>，此效应随后被观测证实，并以其名字命名以纪念他。Casimir 效应是指真空中两片中性（不带电）的金属板会出现吸引力，这个值与导体和介电材料的形状及位置相关。这效应是量子场论的自然结果；量子场论陈述了所有各式各样的基本场—例如电磁场—必须在空间中每个点且处处被量子化，而金属导体或介电材料的存在改变了真空二次量子化后电磁场能量的期望值（见图 2），从而带来吸引力，这种效应只有两物体的距离非常小的时候才被检测到。

### 3.2 Lamb 位移

1947 年，Lamb 以及 Robert Retherford 进行了一项实验，利用微波技术来激发氢原子能级之间的射频跃迁。利用比光学跃迁还要低的频率，使得多普勒增宽效应可以被忽略（因为多普勒谱线增宽跟频率呈正比关系）。他们发现这会使得  $^2S_{1/2}$  能级比  $^2P_{1/2}$  能级高出约 1057 MHz 的能量差。但是根据狄拉克的量子理论， $n$  量子数及  $j$  量子数相同，但  $l$  量子数不同的能态应该是简并态，也就是氢原子这两个能级应该是简并态（见图 3）。如此特殊的差异可以解释为被原子发射又再吸收的虚光子所造成的影响。在量子电动力学中，电磁场也被量子化，而类似于量子力学中的量子谐振子，其最低能态所具有的能量不会为零。因此存在微小的零点振荡，导致电子会进行快速的振荡运动，两简并能级因此互相错开<sup>[10]</sup>。

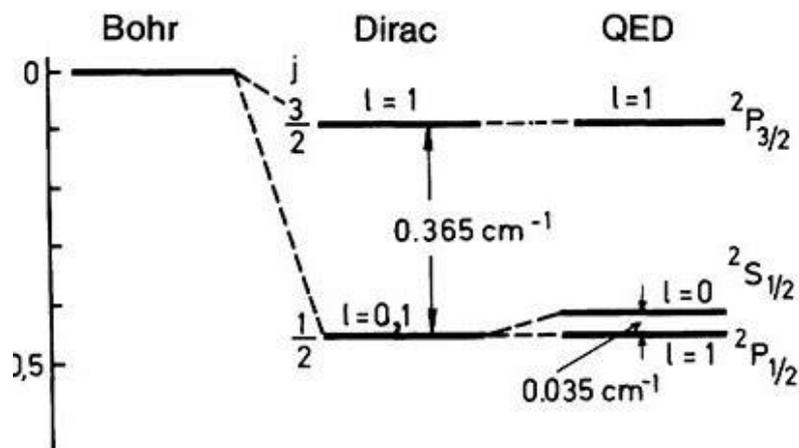


图 3 Lamb 位移能级和 Dirac 理论以及 Bohr 量子理论对比<sup>[9]</sup>

### 3.3 自发辐射

自发辐射是指在没有任何外界作用下，激发态原子或是分子的电子自发地从高能级向低能级跃迁，同时发射出一光子。非相对论性的量子力学无法解释自发辐射，根据该理论，如果一个孤立原子处于定态，即使是激发态，它将一直处于该态，而不会跃迁到其他的态。但是量子场论指出一个电磁场系统即使处于真空态也有振动。所以，当处于激发态的原子与基态的场（也就是真空）发生相互作用的时候将导致自发辐射。

### 3.4 真空极化

真空极化是在湮灭过程中，由于部分正反粒子对带有电荷（例如正负电子对），这类的粒子对会形成电偶极矩。在电磁场的作用下粒子对会产生位移，并且反过来影响电磁场，因此场的作用会比原先预期的来得小，这个虚粒子对的极化的过程就是真空极化。正反费米子对的一圈图对于真空极化的贡献表示成如图 4 所示。

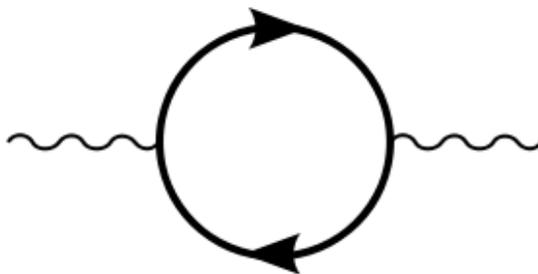


图 4 正反费米子对的一圈图<sup>[11]</sup>

1997 年，日本 TOPAZ 粒子加速器宣布首次观测到真空极化的现象，并将实验结果发表在 Physics Review Letter 上<sup>[2]</sup>。

## 4. 问题的解决

虽然 Casimir 效应等实验证据已经向人们展示了真空零点能存在的实验依据，但是许多理论粒子物理学家相信，由于某些未知的原因导致宇宙学中的有效真空能密度实际上为零，或者接近于零。至少不会超过实物粒子的能量密度。随着粒子物理标准模型的日趋完善和天文学观测手段与精度的不断提高，引力论和宇宙论得到了发展。为了克服宇宙学常数问题，理论物理学家从不同的角度提出了与 Einstein 的初衷完全不同的解释，赋予场方程中的宇宙学常数以不同的物理内涵。

### 4.1 超对称理论

超对称理论认为任何费米子都有一个相同质量的玻色子对应，反之相同。如果超对称成立，那么费米子场和玻色子场的真空能相互抵消，这样或许可以解决宇宙学常数问题。如果超对称性确实存在，那么这种超对称性应该在低能下严重破缺的，它将给出  $\rho_{\text{vac}} \approx M_{\text{susy}}^4$ ， $M_{\text{susy}}$  是超对称破缺的标度。超对称破缺的能标至少在弱电能标之上，即  $M_{\text{susy}} \sim 10^3 \text{GeV}$ 。所以，即使超对称真的存在，那么这理论给出的真空能仍然太大了<sup>[4]</sup>。此外，在实验验证方面，近 20 年来 LHC 的对撞实验并没有发现类似的对称粒子，所以这理论很可能不成立。甚至有人声称，**超对称可能是粒子物理学史上最失败的预言。**

后来，超引力的发展进一步在超对称时空中引入了引力，它是局域满足超对称的引力理论，但是仍然不太成功。

### 4.2 人择原理

在 1973 年的纪念哥白尼诞辰 500 周年的“宇宙理论观测数据”会议上，天体物理学家 Brandon Carter 首次提出了人择原理 (Anthropic principle)。卡特的论文《大数重合与宇宙论中的人择原理》包含了下列陈述：“虽然我们所处的位置不一定是‘中心’，但不可避免地，在某种程度上处于特殊的地位。”这显然与哥白尼原理对立。哥白尼原理否认了人类在宇宙中的特殊地位。后来又提出了强人择原理 (Strong anthropic principle) 和最终人择原理 (Final anthropic principle)。其核心思想是，当我们讨论物理现象的内在本质及物理常数值的大小时，必须考虑到这些物理规律的组合及物理常数值的变化范围能够允许智慧生命的产生，正因为宇宙的演化选择了智慧生命的存在，也就已经自动选择了特定的宇宙演化史，特定的宇宙学常数<sup>[4]</sup>。这个原理的核心是优势分布函数  $P_*(\rho_v)$ 。Weinberg 详细讨论了这个问题，并且给出了分布函数的如下形式<sup>[6]</sup>

$$P_*(\rho_v) = \text{const.} \quad (14)$$

因为优势分布函数  $P_*(\rho_v)$  是一个在比我们当前的可观测宇宙更大的尺度上变化的函数，而每一个智慧生命可以独立产生的区域只不过是这其中很小的一个局部区域，所以智慧生命的产生本身已经是自然选择的结果，即当前我们的可观测宇宙已经是自然选择的结果。在我们当前可观测宇宙范围内，相比超宇宙视界的全空间，其分布函数当然可以被近似认为是一个常数。进一步的分析指出，Weinberg 的猜想 在很多的模型中确实是正确的，但是它并不象人们所期望的那样可以从模型中自然地给出。

这原理有些过于“唯心主义”，或者有些“执果索因”的思想在其中。虽然人择原理给出了宇宙学常数问题较为合理的说法，但是要物理学家真正接受这一解释，还需要更基本的方法来自然地给出优势分布函数，使物理学家相信宇宙中智慧生命的产生本身已经是自然选择的结果。

### 4.3 暗能量的标量场理论

暗能量在上世纪便被提了出来，它是由实验观测结合宇宙学常数问题的一个猜想。WMAP 的观测也证实了宇宙总密度接近于临界密度，其中普通物质和暗物质的比例约为 3:7，其余的部分推测为暗能量<sup>[9]</sup>（见表 1）。

POWER-LAW $\Lambda$ CDM MODEL PARAMETERS: <i>WMAP</i> DATA ONLY		
Parameter	Mean (68% Confidence Range)	Maximum Likelihood
Baryon density, $\Omega_b h^2$ .....	$0.024 \pm 0.001$	0.023
Matter density, $\Omega_m h^2$ .....	$0.14 \pm 0.02$	0.13
Hubble constant, $h$ .....	$0.72 \pm 0.05$	0.68
Amplitude, $A$ .....	$0.9 \pm 0.1$	0.78
Optical depth, $\tau$ .....	$0.166^{+0.076}_{-0.071}$	0.10
Spectral index, $n_s$ .....	$0.99 \pm 0.04$	0.97
$\chi^2_{\text{eff}}/\nu$ .....		1431/1342

NOTE.—Fit to *WMAP* data only.

表 1 利用 WMAP 一年观测数据结合  $\Lambda$ CDM 模型拟合的结果<sup>[9]</sup>

暗能量是人们引入的轻质量标量粒子，它们具有相互作用并且可以推动宇宙膨胀。由于夸克禁闭，所以暗能量很难用非阿贝尔规范场来描述，只有标量场和引力场可描述暗能量。 $\Lambda$ CDM 模型就是一种标准暗能量模型，它尝试解释了对宇宙微波背景辐射、宇宙大尺度结构以及宇宙加速膨胀的超新星观测，是当前能够对这些现象提供融洽合理解释的最简单模型。

除了以上这些解决宇宙学常数问题的方法，还有其他许多解决此问题的尝试方法，例如

调节机制法、修改引力、退化真空和高维引力等<sup>[3]</sup>。

## 5. 总结

Weinberg 在讨论宇宙学常数问题的那篇经典论文的开头就写到: *Physics thrive on Crisis*.<sup>[6]</sup> 回顾历史, 物理学总是在灾难中繁荣起来。十九世纪末, 人们认为物理学大厦已经建成, 只有两朵乌云还飘在上空, 其中一朵便是 Rayleigh-Jeans 公式在辐射频率趋向于无穷大时发散, 被称为“紫外灾难”。这灾难催生了 Planck 的量子论。此后, 量子力学蓬勃发展了起来。但是在宇宙学从诞生到逐渐成熟的一个世纪都还没有出现令人满意的解决宇宙学常数问题的理论。此外, 量子场论发展到今天, 其公式愈发复杂, 严重违背了“Beauty is truth. Truth beauty”的精神, 很难相信这是某种正确理论成熟的样子。这样, 太多问题亟待解决: 广义相对论到底是不是描述引力的终极规律? 暗物质和暗能量模型该如何进一步验证? 我们是否该相信人择原理所说的生命的诞生具有偶然性? 目前, 天文学仍然是一个十分年轻的学科, 机遇和挑战并存; 或许我们可以投身天文研究, 选择某个问题, 奉献自己的青春。

## 参考文献

- [1] Griffiths D. Introduction to elementary particles[M]. John Wiley & Sons, 2020.
- [2] Levine I, Koltick D, Howell B, et al. Measurement of the electromagnetic coupling at large momentum transfer[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(3): 424.
- [3] 杨荣佳. 宇宙学常数、广义快子场、时空不等式和宇宙加速膨胀[D]. 清华大学, 2008.
- [4] 陈驰一. 真空暗能量与宇宙重子数不对称[D]. 中国科学院研究生院(上海天文台), 2005.
- [5] Smolin L. Three roads to quantum gravity[M]. Hachette UK, 2008.
- [6] Weinberg S. The cosmological constant problem[J]. Review of Modern Physics, 1989, 61(1):1-22.
- [7] Garnavich P. M. , Kirshner R. P. , Challis P. , et al. Constraints on Cosmological Models from Hubble Space Telescope Observations of High-z Supernovae[J]. The Astrophysical Journal, 2009, 493(2):L53.
- [8] Casimir H., Polder D.. The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces[J]. 1948, 73(4):360-372.
- [9] Kogut A. , Spergel D. N. , Barnes C. , et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature-Polarization Correlation[J]. Astrophysical Journal Supplement, 2003, 148(1):161.
- [10] Kragh H , Brown L M . Quantum Generations: A History of Physics in the Twentieth Century[J]. Physics Today, 2000, 53(5):56-57.
- [11] Peskin M. An introduction to quantum field theory[M]. CRC press, 2018.
- [12] 俞允强. 物理宇宙学讲义[M]. 北京大学出版社, 2002.